

## Zur Theorie der Kernrotationen\* II

VON HANS HACKENBROICH

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München  
(Z. Naturforschg. 16 a, 1077—1082 [1961]; eingegangen am 20. März 1961)

The effect of residual interactions in the INGLIS model of nuclear rotations is discussed. The interactions are idealized as contactpotentials, and the one particle potentials are taken from NILSSON. In this model the expectation values of the residual interactions cannot be approximated by the "pairing energies", i.e. the binding energies of particles in the same orbit but with opposite z-components of angular momentum. For the nuclei calculated ( $^{156}\text{Gd}$ ,  $^{157}\text{Gd}$ ,  $^{158}\text{Gd}$ ) the residual interactions reduce the nuclear moments of inertia. However, with the strength parameter of the interactions set in order to obtain the correct sequence of nuclear levels, the calculated moments of inertia are still greater than the observed ones. The model cannot explain the difference between the moments of inertia of even and odd nuclei.

Das INGLISSCHE Modell<sup>1</sup> der Kernrotationen ist in seiner einfachsten Form — in der das Potential im Kern durch ein mittleres Potential allein approximiert wird — nicht imstande, das Trägheitsmoment von Kernen in quantitativ befriedigender Weise zu beschreiben<sup>2-4</sup>. Das Potential im Kern ist aber nicht von außen vorgegeben, sondern entsteht durch die Nukleonen selbst; man überlegt sich, daß jedenfalls bei nichtmagischen, deformierten Kernen die Beschreibung der Wechselwirkungen durch ein mittleres, nur ortsabhängiges Einteilchenpotential keine gute Näherung sein sollte. Man kann daher versuchen, die Abweichung der experimentell bestimmten Trägheitsmomente von den berechneten auf diesen Mangel des Modells zurückzuführen.

## A. Der Ansatz

Um den eben hervorgehobenen Fehler des INGLISSCHEN Modells in möglichst einfacher Weise zu kompensieren, wollen wir Zusatzwechselwirkungen zwischen den in den energetisch höchsten, nicht abgeschlossenen Schalen befindlichen Nukleonen einführen, wie dies mit verschiedenen Begründungen schon von mehreren Autoren vorgeschlagen wurde<sup>2, 5</sup>.

Wir wollen das mittlere Potential im Kern wieder wie in I in der von NILSSON<sup>6</sup> vorgeschlagenen Form annehmen:

$$V_p = \frac{m \omega^2}{2} (\lambda^4 u_p^2 + \lambda^4 v_p^2 + \lambda^{-8} w_p^2) + C(l_p s_p) + D l_p^2 \quad (1)$$

(die Bezeichnungen sind in I erklärt).

Es sei daran erinnert, daß bei physikalisch vernünftigen Werten von  $\hbar \omega$ ,  $C$ ,  $D$  und großen Deformationen  $\lambda$  (vgl. I, Gl.(5)) die Eigenfunktionen zu (I) praktisch in Eigenfunktionen zu einem deformierten Oszillatorpotential übergehen. Bei qualitativen Überlegungen können wir also sicher an diesem Grenzfalle diskutieren und insbesondere von Oszillator-schalen und -unterschalen sprechen.

Ferner sei ins Gedächtnis zurückgerufen, daß die im INGLISSCHEN HAMILTON-OPERATOR

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \hbar \vartheta L_1 + \sum_{p, p'} U_{p, p'} \quad (2) \\ = \sum_p T_p + \sum_p V_p + \sum_{p, p'} U_{p, p'} - \hbar \vartheta L_1$$

auf tretende Störung  $-\hbar \vartheta L_1$  zu einer Eigenfunktion von  $\mathcal{H}_0$  — d. h. einer SLATER-Determinante — andere Funktionen beimischt, in denen ein Einteilchenzustand durch einen anderen ersetzt ist, der entweder innerhalb derselben Schale eine Unterschale höher liegt als der ausgefallene oder um zwei Schalen höher. Der Quotient Matrixelement durch Energienenner ist im ersten Falle proportional zu  $(\lambda^3 + \lambda^{-3})/(\lambda^2 - \lambda^{-4})$ , im zweiten proportional zu  $(\lambda^3 - \lambda^{-3})/(\lambda^2 + \lambda^{-4})$ ; da  $\lambda$  stets in der Größen-

\* Der Aufsatz beruht auf einer der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät zu Göttingen im Jahre 1960 vorgelegten Dissertation.

<sup>1</sup> D. INGLIS, Phys. Rev. **96**, 1059 [1954].

<sup>2</sup> A. BOHR u. B. MOTTELSON, K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-fys. Medd. **30**, 1 [1955].

<sup>3</sup> G. LÜDERS, unveröffentlichter Blaudruck.

<sup>4</sup> H. HACKENBROICH, Z. Naturforschg. **16 a**, 1068 [1961], im folgenden als I zitiert.

<sup>5</sup> T. TAMURA, S. BELYAJEV u. M. NOMOTO, Phys. Rev. **111**, 859 [1958]; K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-fys. Medd. **31**, 11 [1959]; Prog. Theor. Phys. **22**, 597 [1959].

<sup>6</sup> S. NILSSON, K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-fys. Medd. **29**, 16 [1955].



ordnung 1 liegt, ist der erste Quotient viel größer als der zweite. Also geschieht in diesem Modell die Umbesetzung vor allem innerhalb nichtabgeschlossener Schalen. Es ist also wichtig, die auf die Nukleonen in nichtabgeschlossenen Schalen wirkenden Kräfte besser zu approximieren als durch ein für alle Nukleonen gemeinsames Einteilchenpotential. Es genügt aber auch, Zusatzwechselwirkungen  $U_{p, p'}$  allein zwischen den äußeren Nukleonen einzuführen.

Diese Zusatzwechselwirkungen wollen wir der leichteren Rechnung wegen als  $\delta$ -funktionsartige Potentiale idealisieren. Der Erwartungswert dieser Wechselwirkungen in einer Schalenmodellkonfiguration setzt sich aus Summanden der Form

$$\begin{aligned} & \langle i(1) j(2) | -\delta_0 (2\pi)^{3/2} [w + m P^M + b P^B + h P^H] \\ & \quad \cdot \delta(1-2) | i(1) j(2) - i(2) j(1) \rangle \\ & = \langle \psi_i(1) s_i(1) \tau_i(1) \psi_j(2) s_j(2) \tau_j(2) | \\ & \quad - \delta_0 (2\pi)^{3/2} [w + m P^M + b P^B + h P^H] \delta(1-2) \\ & \quad | \psi_i(1) s_i(1) \tau_i(1) \psi_j(2) s_j(2) \tau_j(2) \\ & \quad - \psi_i(2) s_i(2) \tau_i(2) \psi_j(1) s_j(1) \tau_j(1) \rangle \\ & = -\delta_0 \Gamma_{i,j} [(w+m)(1-\delta_{s_i, s_j} \delta_{\tau_i, \tau_j}) \\ & \quad + (b-h)(\delta_{s_i, s_j} - \delta_{\tau_i, \tau_j})] \end{aligned} \quad (3)$$

zusammen.

$P^M$ ,  $P^B$  und  $P^H$  sind die MAJORANA-, BARTLETT- bzw. HEISENBERG-Austauschoperatoren;  $w$ ,  $m$ ,  $b$ ,  $h$  sind ein Maß für die relative Stärke der Potentiale. Wir wollen hier annehmen

$$w + m = 1, \quad b - h = 0. \quad (4)$$

Der einzige nach dieser Festsetzung noch freibleibende Potentialstärke-Parameter  $\delta_0$  soll nicht aus den Zwei-Nukleonendaten, sondern aus dem Vergleich unserer Modellrechnung mit der Erfahrung bestimmt werden; man wird nämlich wegen der Bewahrung des NILSSON'SCHEN Ansatzes bei der Deutung von Beobachtungen – auch bei nichtmagischen, deformierten Kernen – vermuten, daß im Potential (1) schon ein Teil der Wechselwirkung der in nicht-abgeschlossenen Schalen befindlichen Nukleonen erfaßt ist\*.  $\delta_0$  soll in der Einheit  $\hbar \omega$  gemessen werden.

$\Gamma_{i,j}$  ist ein Ortsintegral der Form

$$\Gamma_{i,j} = (2\pi)^{3/2} \int |\psi_i(\mathfrak{R})|^2 |\psi_j(\mathfrak{R})|^2 d^3\mathfrak{R}. \quad (5)$$

\* Der Verfasser hätte eine Behandlung vorgezogen, bei der das mittlere Potential allein die Wirkung der inneren Nukleonen auf die äußeren beschreibt; die Wechselwirkung zwischen den äußeren Nukleonen unter sich müßte

$s_i$  und  $s_j$  sind die 3-Komponenten des zu den Zuständen  $i$  und  $j$  gehörenden Spins,  $\tau_i$  und  $\tau_j$  die 3-Komponenten des entsprechenden Isospins (dessen Formalismus hier eine bequeme Schreibweise ermöglicht; es muß aber bemerkt werden, daß wegen der starken COULOMB-Kräfte innerhalb schwerer Kerne unsere Gesamtwellenfunktionen keineswegs Isospineigenfunktionen sind).

## B. Die Paarenergien

Eine erste wichtige Einsicht gewinnen wir, wenn wir danach fragen, ob die Wechselwirkungen zweier Nukleonen, die sich in fast gleichen, nur durch das Vorzeichen der 3-Komponente des Drehimpulses unterschiedenen Zuständen befinden, groß gegen die Wechselwirkung zweier in verschiedenen Zuständen befindlichen Nukleonen ist. Dazu sehen wir Tab. 1; in ihr haben wir die Eigenfunktionen zum Potential (1) durch die – näherungsweise damit übereinstimmenden – Oszillatorfunktionen ersetzt, deren Quantenzahlen  $n_3$ ,  $n_\perp$  und  $m$  (vgl. I) durch den Buchstaben  $i$  zusammengefaßt seien.

Wir sehen, daß zwar keines der in der Tabelle verzeichneten Integrale größer ist als  $\Gamma_{(3,2,2), (3,2,2)}$ , daß sich jedoch  $\Gamma_{(3,2,2), (3,2,2)}$  keinesfalls von den anderen Integralen größenordnungsmäßig unterscheidet. Tab. 1 ist für die  $\Gamma_{i,j}$  typisch. Es ist daher nicht korrekt, bei der Berechnung der Trägheitsmomente (vgl. I, Abschn. II) nur nachzusehen, ob in den Energienennern jeweils eine „Paarenergie“ auftritt oder nicht, oder daran wie in <sup>2</sup> Folgerungen über den Unterschied der Trägheitsmomente von  $g$ - $g$ - und  $u$ - $g$ -Kernen zu knüpfen.

Wir wollen uns diese Paarenergien für die hier interessierenden Einteilchenzustände anschreiben (die Funktionen sind wieder wie in Tab. 1 bezeichnet, ebenso ist die Anordnung der Funktionen zu dieser Tabelle analog gewählt).

Wir sehen, daß die  $\Gamma_{i,i}$  einen systematischen Gang zeigen: Die Paarenergien sind besonders groß bei den energetisch tiefsten Zuständen jeder Schale. In der Variante des INGLIS-Modells, in der Zweiteilchenwechselwirkungen nicht berücksichtigt werden, tragen Umbesetzungen zwischen solchen Zuständen

dann gleich der vollen Zwei-Nukleonen-Wechselwirkung sein. Die rechnerische Behandlung dieses Modells überstieg jedoch die Möglichkeiten der zur Verfügung stehenden Rechenmaschine.

$j$ aus Schale 4	$\Gamma_{(3, 2, 2), j}$	$j$ aus Schale 5	$\Gamma_{(3, 2, 2), j}$	$j$ aus Schale 6	$\Gamma_{(3, 2, 2), j}$
4, 0, 0 >	0,093	5, 0, 0 >	0,076	6, 0, 0 >	0,066
3, 1, 1 >	0,215	4, 1, 1 >	0,139	5, 1, 1 >	0,114
2, 2, 2 >	0,149	3, 2, 2 >	0,215	4, 2, 2 >	0,139
2, 2, 0 >	0,099	3, 2, 0 >	0,144	4, 2, 0 >	0,093
1, 3, 3 >	0,107	2, 3, 3 >	0,125	3, 3, 3 >	0,179
1, 3, 1 >	0,064	2, 3, 1 >	0,075	3, 3, 1 >	0,108
0, 4, 4 >	0,073	1, 4, 4 >	0,080	2, 4, 4 >	0,093
0, 4, 2 >	0,059	1, 4, 2 >	0,064	2, 4, 2 >	0,075
0, 4, 0 >	0,049	1, 4, 0 >	0,054	2, 4, 0 >	0,062

Tab. 1. Die Integrale  $\Gamma_{i, j}$  mit  $i = (3, 2, 2)$ .

$i$ aus Schale 4	$\Gamma_{i, i}$	$i$ aus Schale 5	$\Gamma_{i, i}$	$i$ aus Schale 6	$\Gamma_{i, i}$
4, 0, 0 >	0,528	5, 0, 0 >	0,493	6, 0, 0 >	0,465
3, 1, 1 >	0,287	4, 1, 1 >	0,264	5, 1, 1 >	0,246
2, 2, 2 >	0,240	3, 2, 2 >	0,215	4, 2, 2 >	0,198
2, 2, 0 >	0,321	3, 2, 0 >	0,287	4, 2, 0 >	0,264
1, 3, 3 >	0,234	2, 3, 3 >	0,200	3, 3, 3 >	0,179
1, 3, 1 >	0,234	2, 3, 1 >	0,200	3, 3, 1 >	0,179
0, 4, 4 >	0,273	1, 4, 4 >	0,205	2, 4, 4 >	0,175
0, 4, 2 >	0,250	1, 4, 2 >	0,187	2, 4, 2 >	0,160
0, 4, 0 >	0,344	1, 4, 0 >	0,257	2, 4, 0 >	0,220
		0, 5, 5 >	0,246	1, 5, 5 >	0,185

Tab. 2. Die Paarenergieintegrale  $\Gamma_{i, i}$ .

besonders viel zum Trägheitsmoment bei <sup>4, 7</sup>, da die dabei auftretenden Energienenner sehr klein und die Matrixelemente sehr groß sind. Obwohl also die Zusatzwechselwirkungen nicht allein durch die Paarenergien beschrieben werden können, sind die Paarenergien doch wegen dieses Ganges wichtig: Dieser bewirkt, daß die besonders großen Beiträge zum Trägheitsmoment besonders stark verkleinert werden.

**C. Die Grundzustände von Kernen**

Um unsere Überlegungen quantitativ fassen zu können, betrachten wir als Beispiel die drei Kerne <sup>156</sup><sub>64</sub>Gd, <sup>157</sup><sub>64</sub>Gd und <sup>158</sup><sub>64</sub>Gd. Sie sind hierzu besonders geeignet, da über sie relativ viel bekannt ist <sup>8</sup> und außerdem die Zahl der Konfigurationen klein ist, die nach dem NILSSONSCHEN Schema energetisch tief liegen. Das Termschema dieser Kerne ist in Tab. 3 angegeben.

<sup>156</sup> Gd		<sup>157</sup> Gd		<sup>158</sup> Gd	
$\beta_0 = 0,41$				$\beta_0 = 0,46$	
0	0 <sup>+</sup>	0	$\frac{3}{2}^-$	0	0 <sup>+</sup>
89 keV	2 <sup>+</sup>	55 keV	$\frac{5}{2}^-$	79,5 keV	2 <sup>+</sup>
287 keV	4 <sup>+</sup>	131 keV	$\frac{7}{2}^-$	261,9 keV	4 <sup>+</sup>
1,17 MeV				538,9 keV	6 <sup>+</sup>
1,24 MeV				896 keV	8 <sup>+</sup>
				1,182 MeV	
				1,257 MeV	

Tab. 3. Experimentell gefundene Anregungsenergien einiger Gadoliniumisotope.

Für die Rechnung benutzen wir als Einteilchen-eigenfunktionen die in Anm. <sup>6, 7</sup> bzw. <sup>9</sup> angegebenen (näherungsweise) Eigenfunktionen zu (1); wir haben dabei angenommen, daß die Konstanten  $\hbar \omega$ ,  $C$ ,  $D$  und  $\lambda$  den in I angegebenen Wert haben.

Wir untersuchen zunächst die Form des Grundzustandes von <sup>157</sup>Gd; dabei betrachten wir die in Tab. 4 zusammengestellten Konfigurationen (die besetzten Einteilchenzustände werden durch ihre

<sup>7</sup> H. HACKENBROICH, Göttinger Diplomarbeit 1957.

<sup>8</sup> Nuclear Data Sheets, herausg. vom Nat. Bur. Stand., USA.

<sup>9</sup> B. MOTTELSON u. S. NILSSON, K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-fys. Medd. 1, 8 [1959].

Protonen:													
$\alpha$	24,	30,	34	23,	29,	33	22,	27	21	18	38	37	
$\beta$	24,	30,	34	23,	29,	33	22,		21	18	38	37	36
$\gamma$	24,	30,	34	23,	29,	33	22		21	18	38	37	36
$\delta$	24,	30,	34	23,	29		22,	27	21	18	38	37	
Neutronen:													
a	38,	47,	53	37,	46,	(52)	36		35	32	60	57	55
b	38,	47,	53	37,	46,	(52)	36,	44	35	32	60	57	
c	38,	47,	53	37,	46		36,	(44)	35	32	60	57	55
d	38,	47,	53	37,	46,	52	36		(35)	32	60	57	55

Tab. 4.

Nummer im NILSSONschen Schema<sup>6</sup> bezeichnet und sind nach Oszillatorschale und Drehimpuls geordnet angegeben).

Alle Einteilchenzustände, mit Ausnahme der eingeklammerten Zustände, sollen doppelt besetzt sein, d. h. es soll mit einem Zustand positiver 3-Komponenten des Drehimpulses auch der entsprechende Zustand negativer 3-Komponenten besetzt sein.

Die Zustände, die die Neutronenkonfigurationen *a* oder *b* enthalten, haben die Drehimpulskomponente  $\frac{3}{2}$ , entsprechend gehört zu den Neutronenkonfigurationen *c* bzw. *d* die Drehimpulskomponente  $\frac{5}{2}$  bzw.  $\frac{3}{2}$ . Es muß erwartet werden, daß der Drehimpuls des tiefsten Zustandes einer Rotationsbande gleich der 3-Komponente des Gesamtdrehimpulses ist<sup>10</sup>; experimentell wurde der Drehimpuls des <sup>157</sup>Gd-Grundzustandes zu 3/2 bestimmt.

Es muß darauf aufmerksam gemacht werden, daß etwa bei  $\delta_0 \approx 0,1 \hbar \omega$  die störungstheoretische Korrektur 2. Näherung zur Energie eines Kernes noch vernachlässigbar klein ist (wenn sich nicht gerade zwei Zustände gleichen Drehimpulses energetisch um weniger als  $\approx 0,01 \hbar \omega$  unterscheiden). Man sieht dies ein, wenn man folgendes bedenkt: sicherlich sind diejenigen Zweiteilchenanregungen besonders wichtig, die der Umbesetzung eines Paares entsprechen. Die Matrixelemente für den Prozeß einer Umbesetzung von Teilchen aus Zuständen *i*, *j* in Zustände *i'*, *j'* mit  $(i, j) \neq (i', j')$  sind nämlich

$$\langle i'(1) j'(2) | -\delta_0 (2\pi)^{1/2} \delta(1-2) \cdot | i(1) j(2) - i(2) j(1) \rangle \sim -\delta_0 (2\pi)^{1/2} \int \psi_{i'}^*(\mathfrak{R}) \psi_j^*(\mathfrak{R}) \psi_i(\mathfrak{R}) \psi_j(\mathfrak{R}) d^3\mathfrak{R}, \tag{6}$$

und diese Integrale erweisen sich stets als viel kleiner als die bei Paarumsetzungen eingehenden Integrale, die von der Form

$$\langle i(1) \hat{i}(2) | -\delta_0 (2\pi)^{1/2} \delta(1-2) \cdot | j(1) \hat{j}(2) - j(2) j(1) \rangle \sim -\delta_0 I_{i,j} [n_{3i} = n_{3\hat{i}}; n_{\perp i} = n_{\perp \hat{i}}; s_i = -s_{\hat{i}}; m_i = -m_{\hat{i}}; \text{entsprechend bei } j \text{ und } \hat{j}] \tag{7}$$

sind. Die typische Größe dieser Integrale wurde in Tab. 1 mitgeteilt. Man sieht daraus gleich, daß bei der angenommenen Stärke der Zusatzwechselwirkung jedenfalls die Zweiteilchenumsetzungen wenig zur 2. störungstheoretischen Energiekorrektur beitragen.

Die Beiträge der Einteilchenumbesetzungen zur Energiekorrektur sind schwieriger zu überschauen, da die hierbei eingehenden Matrixelemente von der Form

$$\sum_j \langle i'(1) j(2) | -\delta_0 (2\pi)^{1/2} \delta(1-2) \cdot | i(1) j(2) - i(2) j(1) \rangle \sim -\delta_0 \delta_{m_i', m_i} (2\pi)^{1/2} \int \psi_{i'}^*(\mathfrak{R}) \psi_i(\mathfrak{R}) \left[ \sum_j \psi_j^*(\mathfrak{R}) \psi_j(\mathfrak{R}) \right] d^3\mathfrak{R} \tag{8}$$

sind. Diese Matrixelemente liegen auch in der Größenordnung der aus (7) folgenden Matrixelemente; der Ausdruck (8) bedeutet nämlich praktisch, daß die Ortsfunktion  $\psi_{i'}^*(\mathfrak{R}) \psi_i(\mathfrak{R})$  über der Gewichtsfunktion  $\sum_j |\psi_j(\mathfrak{R})|^2$  integriert wird, die nur da wesentlich von Null verschieden ist, wo  $\psi_{i'}^*(\mathfrak{R}) \psi_i(\mathfrak{R})$  sehr rasch oszilliert. Außerdem sind hier die in der Störungstheorie auftretenden Energienenner wegen des Faktors  $\delta_{m_i', m_i}$  in (8) größer als die Energienenner bei den wichtigsten Zweiteilchenanregungen.

In den numerischen Rechnungen haben wir folgende Änderungen der Wellenfunktion mitgenommen: Erstens Einteilchenanregungen vom höchsten besetzten Einteilchenzustand einer jeden Drehimpuls-3-Komponente in jeder nichtabgeschlossenen Schale und zweitens Paarumsetzungen zwischen Zuständen, deren NILSSON-Energie um nicht mehr als etwa  $0,2 \hbar \omega \approx 2 \text{ MeV}$  differiert. Abb. 1 zeigt die energie-

<sup>10</sup> A. BOHR u. B. MOTTELSON, K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-fys. Medd. 27, 16 [1953].

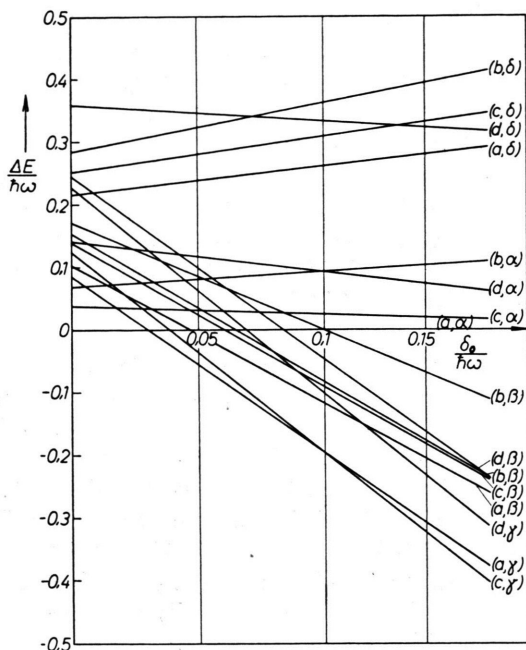


Abb. 1. Differenz zwischen der Energie einiger Konfigurationen des <sup>157</sup>Gd und der Energie des NILSSON-Grundzustandes (a, α) in Abhängigkeit von der Stärke der Zusatzwechselwirkungen (Störungstheorie erster Näherung).

tische Reihenfolge der beim <sup>157</sup>Gd betrachteten Konfigurationen in erster störungstheoretischer Näherung in Abhängigkeit von δ<sub>0</sub>. Dabei wurde nach dem Vorbild von NILSSON als Schalenmodellenergie des Kernes als 3/4 der Summe der Schalenmodellenergien der Einzelnukleonen genommen; die angenommene Verformung ist δ ≈ 0,3, d. h. β ≈ 0,4. Diese Reihenfolge kann aber empirisch, auch durch Vergleich mit den Daten der benachbarten u-g-Kerne, gut erschlossen werden: Beispielsweise hat der Grundzustand des <sup>157</sup>Gd den Drehimpuls 3/2 und der erste innere angeregte Zustand vermutlich den Drehimpuls 5/2. Das NILSSON-Modell allein gibt diese experimentellen Befunde recht gut wieder; die Abbildungen zeigen also praktisch, wie groß man δ<sub>0</sub> wählen darf, um diese Übereinstimmung mit dem Experiment nicht zu zerstören. Man erkennt, daß die Größenordnung von δ<sub>0</sub>/ħ ω höchstens 0,1 betragen darf.

Das bedeutet, daß die Zusatzwechselwirkungen recht schwach sind, wie wir aus folgendem Vergleich ersehen: in einer Arbeit von FORD und TRUE<sup>11</sup> wurde die Wechselwirkung von Teilchen (bzw. Löchern), die sich im Feld einer abgeschlossenen Schale

<sup>11</sup> K. FORD u. W. TRUE, Phys. Rev. **109**, 1675 [1958].

(<sup>208</sup>Pb) befinden, unter Annahme eines Wechselwirkungspotentials der Form

$$U(r_1 - r_2) = -U_0 e^{-(r_1 - r_2)^2/b^2}$$

zu U<sub>0</sub> = 32,5 MeV, b = 1,85 · 10<sup>-13</sup> cm bestimmt. Setzen wir nun mit einer durch die Gestalt der Oszillatorfunktionen nahegelegten Aufspaltung

$$\psi_i(r) = \varphi_i(r) e^{-r^2/2a^2},$$

so ist, wenn wir auf Schwerpunkts- und Relativkoordinaten übergehen und bei der Rechnung

$$|\psi_i(\mathfrak{R} + \frac{1}{2}\mathfrak{r})|^2 |\psi_j(\mathfrak{R} - \frac{1}{2}\mathfrak{r})|^2 \approx |\psi_i(\mathfrak{R})|^2 |\psi_j(\mathfrak{R})|^2$$

setzen, was im Grenzfall kurzer Reichweite der Wechselwirkung erlaubt ist,

$$\langle \psi_i(r_1) \psi_j(r_j) | U(r_1 - r_2) | \psi_i(r_1) \psi_j(r_2) \rangle \quad (9) \\ \approx -0,5 \hbar \omega \cdot T_{i,j'}.$$

Mit den Werten von FORD und TRUE ergibt sich also etwa δ<sub>0</sub> ≈ 0,5 ħ ω. Dieser Wert ist jedoch, verglichen mit dem von uns als zulässig erkannten Wert δ<sub>0</sub> ≈ 0,1 ħ ω so groß, daß wir auch hieraus schließen dürfen, daß im NILSSON-Potential wesentliche Teile der Wechselwirkung der Nukleonen in nichtabgeschlossenen Schalen unter sich mit enthalten sind.

Als Resultat unserer Überlegungen über die Größe von δ<sub>0</sub> müssen wir bei <sup>157</sup>Gd die Konfiguration (a, γ) als Grundzustand ansehen.

Wir schließen aus einer ähnlichen Rechnung, daß die Grundzustände von <sup>156</sup>Gd und <sup>158</sup>Gd die schon in Tab. 4 unter γ aufgeführte Protonenkonfiguration haben, dazu die in Tab. 5 zusammengestellten Neutronenkonfigurationen.

Neutronen bei <sup>156</sup> Gd:											
38,	47,	53	37,	46	36,	35	32	60	57	55	
Neutronen bei <sup>158</sup> Gd:											
38,	47,	53	37,	46,	52	36	35	32	60	57	55

Tab. 5.

### D. Die Trägheitsmomente

Für diese Konfigurationen berechnen wir nun nach der Gleichung

$$\Theta = 2 \hbar^2 \sum_{\mu \neq 0} \frac{|\langle \mu | L_1 | 0 \rangle|^2}{E_\mu - E_0}$$

(vgl. I, 2 a) das Trägheitsmoment und daraus die erste Anregungsenergie in Abhängigkeit von der

Stärke der Zusatzwechselwirkungen; dabei wurde die Verformung zu  $\lambda = 1,061$  angenommen, was praktisch mit  $\beta = 0,4$  und den in Tab. 3 angegebenen experimentellen Werten übereinstimmt. Bei der Berechnung von Matrixelementen und Energiedifferenzen zwischen Zuständen, die sich in nullter störungstheoretischer Näherung bezüglich der Zweiteilchenwechselwirkungen nur um einen Einteilchenzustand derselben Schale unterscheiden, wurden die

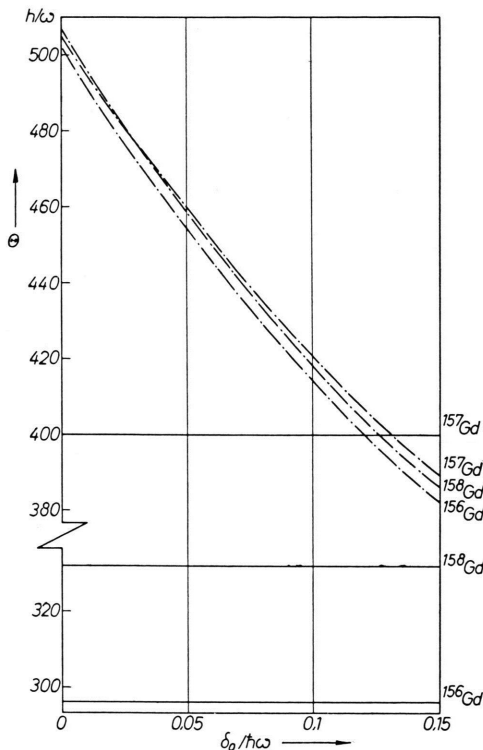


Abb. 2. Trägheitsmomente einiger Gadoliniumkerne in Abhängigkeit von der Stärke der Zusatzwechselwirkungen; gemessen —, berechnet - - - - .

Zweiteilchenwechselwirkungen in erster störungstheoretischer Näherung berücksichtigt, bei der Berechnung anderer Beiträge zum Trägheitsmoment jedoch weggelassen. Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind in Abb. 2 dargestellt.

Wir sehen aus dieser Abbildung zunächst, daß sich jedenfalls in diesem Beispiel die Trägheitsmomente von u-g- und g-g-Kernen nicht sehr wesentlich unterscheiden. Die Zusatzwechselwirkungen liefern somit nicht den experimentell gefundenen Unterschied dieser Trägheitsmomente.

Zweitens sehen wir, daß durch die Einführung der Zusatzwechselwirkungen die aus dem Modell folgenden Trägheitsmomente in der richtigen Weise verändert — nämlich verkleinert — werden. In dem als zulässig erkannten Intervall von  $\delta_0$  sind jedoch die berechneten Trägheitsmomente stets noch größer als die empirisch bestimmten; die Wechselwirkungen verkleinern die Trägheitsmomente gegenüber ihrem „Schalenmodellwert“ äußerstenfalls um einen Faktor  $\frac{3}{4}$  und nicht um einen Faktor  $\frac{1}{2}$ .

### Schlußfolgerung

Als Resultat unserer Rechnungen sehen wir, daß durch die Einführung von Zweiteilchenwechselwirkungen wohl die Übereinstimmung des Modells mit der Erfahrung verbessert, aber — jedenfalls bei dem hier diskutierten Ansatz — nicht volle Übereinstimmung erreicht werden kann.

Ich danke Herrn Prof. W. HEISENBERG für stetige Förderung. Den Herren Prof. G. LÜDERS, Prof. K. FORD, Dr. W. BREINIG und Dr. P. MITTELSTAEDT bin ich wegen vieler Diskussionen zu Dank verpflichtet. Herr Prof. L. BIERMANN ermöglichte mir die Benutzung der elektronischen Rechenmaschine G 2.